

Distributions

B.1. Quelques rappels

Nous énonçons ici sans preuve un certain nombre de définitions et de résultats qui nous seront utiles par la suite et qui doivent être connus (et sinon devront être traités à titre d'exercices!).

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On considère l'ouvert ω des points au voisinage desquels $f = 0$ p.p. Alors le support (essentiel) de f est $\Omega \setminus \omega$. Si f est continue, le support de f coïncide avec l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels f ne s'annule pas :

$$\text{Supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega / f(x) \neq 0\}}.$$

Si f, g sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ alors leur produit de convolution est la fonction de $L^1(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$f \star g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy$$

et l'on a

$$\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

C'est une opération commutative et associative. Plus généralement le produit de convolution de $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ par $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ vérifie

$$\|f \star g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}, \quad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

En outre le produit de convolution de f par g est bien défini et est continu et borné sur \mathbb{R}^d si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, où l'on note $C_c(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans \mathbb{R}^d . On rappelle que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $|\alpha| \leq k$ alors pour tout $|\beta| \leq k$, $\partial^\beta(f \star g) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\partial^\beta(f \star g) = f \star \partial^\beta g.$$

Enfin

$$\text{Supp}(f \star g) \subset \overline{\text{Supp}(f) + \text{Supp}(g)}.$$

B.2. Limites inductives et topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$

B.2.1. Sur les fonctions C^∞ à support compact.

Lemme B.2.1. Soit K un compact de \mathbb{R}^d et U voisinage ouvert de K . Il existe une fonction $\varphi \in C^\infty$, à valeurs dans $[0, 1]$, nulle hors de U et telle que $\varphi|_K \equiv 1$.

Démonstration. On commence par montrer l'existence d'une fonction $\psi \in C^\infty$, positive ou nulle, strictement positive sur K , et nulle hors de U . Soit la fonction C^∞

$$\rho(t) := 0 \quad \text{si } t \leq 0, \quad \rho(t) := e^{-\frac{1}{t}} \quad \text{si } t > 0.$$

Pour tout $a \in K$ il existe une boule ouverte $B(a, r)$ incluse dans U , et on recouvre K par m telles boules ouvertes $(B(a_j, r_j))_{1 \leq j \leq m}$. On constate alors que la fonction

$$\psi(x) := \sum_{j=1}^m \rho(r_j^2 - |x - a_j|^2)$$

convient. Soit maintenant r le minimum sur K de la fonction $x \mapsto d(x, {}^c U)$ et soient les voisinages ouverts de K

$$V_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^d / d(x, K) < \frac{r}{3} \right\} \quad \text{et} \quad V_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^d / d(x, K) < \frac{2r}{3} \right\}.$$

On a alors $\overline{V_1} \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset U$ et la construction précédente fournit une fonction g dans C^∞ , positive ou nulle, strictement positive sur $\overline{V_1}$, et nulle hors de V_2 ainsi que d'une fonction h dans C^∞ , positive ou nulle, strictement positive sur $\overline{V_2} \setminus V_1$, et nulle sur K . Alors en prolongeant h en une fonction strictement positive sur le complémentaire de V_1 dans \mathbb{R}^d on peut poser

$$\varphi := \frac{g}{g+h}.$$

Le lemme est démontré. \square

Corollaire B.2.2 (Partition de l'unité). *Soit K un ensemble compact de \mathbb{R}^d et $(U_j)_{1 \leq j \leq N}$ des ouverts de \mathbb{R}^d tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^N U_j$. Il existe des fonctions $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, à valeurs dans $[0, 1]$ et nulles en dehors de U_j , telles que*

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j = 1 \quad \text{au voisinage de } K.$$

Démonstration. On commence par construire des compacts $K_j \subset U_j$ tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^N K_j$. Le lemme précédent fournit des fonctions $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, à valeurs dans $[0, 1]$, égales

à 1 au voisinage de K_j et nulles en dehors de U_j . Soit V l'ouvert sur lequel $\sum_{j=1}^N \psi_j$ est non nul. On construit également ψ_0 égale à 0 au voisinage de K et à 1 au voisinage du complémentaire de V . La fonction $S := \sum_{j=0}^N \psi_j$ est strictement positive sur \mathbb{R}^d et les fonctions

$$\varphi_j := \frac{\psi_j}{S}$$

conviennent. Le corollaire est démontré. \square

Définition B.2.3 (Suite régularisante). *Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive d'intégrale 1, supportée dans $B(0, 1)$. La suite $(\zeta_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, 1[}$ définie par*

$$\zeta_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^d} \zeta\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$$

est appelée suite régularisante.

Théorème B.2.4 (Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $C_c(\mathbb{R}^d)$). *Soit f une fonction continue à support compact dans \mathbb{R}^d et soit $(\zeta_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, 1[}$ une suite régularisante. Alors $\zeta_\varepsilon \star f$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\zeta_\varepsilon \star f \rightarrow f, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

uniformément sur \mathbb{R}^d . De même si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ alors $\zeta_\varepsilon \star f$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$\zeta_\varepsilon \star f \rightarrow f, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soit f une fonction continue à support compact dans \mathbb{R}^d . Le fait que $\zeta_\varepsilon \star f$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est une conséquence immédiate des règles de dérivation du produit de convolution. La convergence s'obtient en constatant que

$$\begin{aligned} \zeta_\varepsilon \star f(x) - f(x) &= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} \zeta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) f(x-y) dy - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(y) f(x-\varepsilon y) dy - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(y) (f(x-\varepsilon y) - f(x)) dy \end{aligned}$$

et le résultat suit de la continuité (uniforme sur le support de ζ) de f .

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ alors de même $\zeta_\varepsilon \star f$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (puisque $\zeta_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^d)$), ainsi que toutes ses dérivées). Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ on peut se ramener au cas où f est continue à support compact puisque si $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\|\zeta_\varepsilon \star f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\zeta_\varepsilon \star g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\zeta_\varepsilon \star (f - g)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

et

$$\|\zeta_\varepsilon \star (f - g)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Enfin calcul précédent implique que

$$\|\zeta_\varepsilon \star g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\zeta_\varepsilon \star g(x) - g(x)| |B(0; R + \varepsilon)|^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

où R est tel que le support de g est inclus dans $B(0, R)$. \square

Définition B.2.5 (Suite exhaustive de compacts). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . Une suite exhaustive de compacts $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de Ω est une suite de compacts inclus dans Ω tels que K_j est inclus dans l'intérieur de K_{j+1} et $\Omega = \bigcup_j K_j$. Par exemple

$$K_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^d / |x| \leq j, \quad d(x, \partial\Omega) \geq j^{-1} \right\}.$$

Proposition B.2.6. Soient f et g deux fonctions de $L^1_{loc}(\Omega)$. On a les équivalences entre

a) $f = g$ p.p sur Ω

b) $\int f\varphi(x) dx = \int g\varphi(x) dx$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Démonstration. On a clairement a) \implies b). Inversement définissons $h := f - g$ et soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω . Soit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\overset{\circ}{K}_{n+1})$ telle que $\theta_n = 1$ sur K_n et soit ζ_ε une suite régularisante. Alors pour tout entier n

$$\zeta_\varepsilon \star h\theta_n \rightarrow h\theta_n \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

dans L^1 . Mais $\zeta_\varepsilon \star h\theta_n = 0$ par hypothèse, d'où le résultat. \square

Exercices. a) Soit φ une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} , à support dans $[0, 1]$ et posons

$$\phi_n(x) := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \varphi(x-j).$$

Montrer que $(\phi_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ muni de la famille de semi-normes

$$\|\varphi\|_k := \max_{|\alpha| \leq k, x \in \mathbb{R}} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

et que sa limite n'est pas à support compact.

b) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et K un compact de Ω .

– L'espace $\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(K) / \text{Supp } \varphi \subset K\}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support dans K , muni de la famille de semi-normes

$$\rho_n(\varphi) := \max_{|\alpha| \leq n, x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

est un espace de Fréchet.

– L'espace $\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) / \text{Supp } \varphi \text{ est compact}\}$ des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact, muni de la famille de semi-normes

$$\|\varphi\|_n := \max_{|\alpha| \leq n, x \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

est un pré-Fréchet, mais il n'est pas complet. Sa complétion est l'ensemble $C_0^\infty(\Omega)$ des fonctions C^∞ tendant vers 0, ainsi que toutes leurs dérivées, sur le bord de Ω (resp. à l'infini si Ω n'est pas borné).

Pour compléter $\mathcal{D}(\Omega)$ on va rendre la topologie plus fine. Cette topologie s'avèrera ne pas être métrisable mais ce ne sera pas un problème dans la pratique.

B.2.2. Limites inductives.

Définition B.2.7. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et soit une suite croissante $(E_k, \mathcal{T}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes telle que $E := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, E_k est fermé dans E_{k+1} pour la topologie \mathcal{T}_{k+1} et que la topologie de E_k est celle induite de celle de E_{k+1} sur E_k (en d'autres termes $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_{k+1}|_{E_k}$). On associe à chaque topologie \mathcal{T}_k une famille de semi-normes $\mathcal{P}_k = (p_k^\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}_k}$. La topologie \mathcal{T} sur E définie par la famille de semi-normes

$$\mathcal{P} := \left\{ p \text{ semi-norme sur } E / p|_{E_k} \text{ est continue pour tout } k \in \mathbb{N} \right\},$$

autrement dit

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{P} &\iff \forall k \in \mathbb{N}, \exists C > 0, J \subset \mathcal{A}_k \text{ finie,} \\ & p \leq C \sup_{\alpha \in J} p_k^\alpha \text{ sur } E_k, \end{aligned} \tag{B.1}$$

est appelée topologie limite inductive des topologies $(\mathcal{T}_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Notons que les injections canoniques

$$J_k : E_k \rightarrow E$$

sont donc continues de (E_k, \mathcal{T}_k) vers (E, \mathcal{T}) .

Dans tout ce paragraphe on se placera dans le contexte de la Définition B.2.7.

Remarque. La topologie \mathcal{T} limite inductive des topologies $(\mathcal{T}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe la plus fine rendant continues les injections canoniques $J_k : E_k \rightarrow E$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet soit \mathcal{T}' une topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe sur E , qui rend continues ces projections canoniques, et soit \mathcal{P}' la famille de semi-normes associée. Comme les injections canoniques sont continues on a par (B.1) que $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, donc \mathcal{T} a plus d'ouverts que \mathcal{T}' et est donc plus fine.

Exemples. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues dans Ω à support compact, $C_c^m(\Omega)$ des fonctions de classe C^m dans Ω à support compact, et $C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions de classe C^∞ dans Ω à support compact, sont limites inductives des suites d'espaces $C_{K_i}(\Omega)$, $C_{K_i}^m(\Omega)$ et $C_{K_i}^\infty = \mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$ respectivement, où (K_i) est une suite exhaustive de compacts de Ω , munis respectivement des semi-normes ρ_0 , ρ_m et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On vérifie facilement que la topologie définie par ces limites inductives ne dépend pas du choix de la suite de compacts.

Lemme B.2.8. Soit (E, \mathcal{T}) limite inductive d'une suite croissante (E_k, \mathcal{T}_k) d'espaces vectoriels topologiques localement convexes. Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe et T une application linéaire de E dans F . Alors T est continue si et seulement si $T|_{E_k}$ est continue (pour \mathcal{T}_k) pour tout k .

Démonstration. Si T est continue alors $T|_{E_k}$ l'est aussi comme composée de T et de l'injection canonique $J_k : E_k \rightarrow E$. Inversement supposons que $T|_{E_k}$ est continue pour tout k , et soit \mathcal{Q} une famille de semi-normes définissant la topologie de F et $q \in \mathcal{Q}$. Alors $q \circ T$ est une semi-norme sur E continue sur chaque E_k et appartient donc à \mathcal{P} . Le résultat suit. \square

Lemme B.2.9. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et F un sous-espace vectoriel de E . Si U est un ouvert convexe de F pour la topologie induite par celle de E , il existe C ouvert convexe de E tel que $U = C \cap F$.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $0 \in U$. Par définition il existe un ouvert V de E tel que $U = V \cap F$ et par locale convexité il existe W ouvert convexe de E contenant 0 tel que $W \subset V$. On pose alors

$$C := \bigcup_{t \in [0,1]} (tW + (1-t)U).$$

Comme pour tout $x \in U$ on peut écrire

$$x = \varepsilon^2 x + (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)x, \quad \text{avec } (1+\varepsilon)x \in U \text{ et } \varepsilon x \in W \text{ pour } \varepsilon \text{ assez petit}$$

on a

$$C = \bigcup_{t \in [0,1]} (tW + (1-t)U),$$

donc C est ouvert, et il est évidemment convexe. On a clairement $U \subset C \cap F$, et enfin on a $C \cap F \subset U$ car pour tout $t \in]0, 1]$

$$(tW + (1-t)U) \cap F = tW \cap F + (1-t)U \subset tV \cap F + (1-t)U \subset tU + (1-t)U \subset U$$

car U est convexe. Le lemme est démontré. \square

Proposition B.2.10. Soit (E, \mathcal{T}) limite inductive d'une suite croissante (E_k, \mathcal{T}_k) d'espaces vectoriels topologiques localement convexes vérifiant les hypothèses de la Définition B.2.7. On a les propriétés suivantes :

- a) Si U est un convexe symétrique de E contenant 0 tel que $U \cap E_k$ est un ouvert de E_k pour tout k , alors U est un voisinage ouvert de 0 dans (E, \mathcal{T}) .

- b) La topologie $\mathcal{T}|_{E_k}$ induite par celle de E sur E_k coïncide avec celle de E_k .
c) Si chaque (E_k, \mathcal{T}_k) est séparé, alors (E, \mathcal{T}) l'est aussi.
d) E_k est fermé dans (E, \mathcal{T}) pour tout k .

Démonstration. a) Par définition, pour tout k il existe une boule ouverte B_k pour \mathcal{P}_k centrée en 0 incluse dans $U \cap E_k$. On rappelle que $\|\cdot\|_C$ désigne la jauge d'un convexe C , et c'est une semi-norme si C est symétrique. Alors $\|\cdot\|_{U|_{E_k}} \leq \|\cdot\|_{B_k}$ donc par le Lemme A.2.10

on déduit que $\|\cdot\|_U$ est une semi-norme continue sur (E, \mathcal{T}) . Mais l'ensemble $\{x / \|x\|_U < 1\}$ est inclus dans U , donc U est un voisinage de 0 dans (E, \mathcal{T}) . Montrons maintenant qu'il est ouvert : soit $x \in U$, et montrons qu'il existe V voisinage de 0 pour E tel que $x + V \subset U$. On a $x \in E_k$ pour un certain k et comme $U \cap E_k$ est un ouvert de E_k , il existe V_k voisinage ouvert (convexe symétrique) de 0 dans E_k tel que $x + V_k \subset U \cap E_k$. On construit alors une famille croissante $(V_{k+\ell})_{\ell \geq 0}$ de voisinages ouverts convexes symétriques de 0 dans $E_{k+\ell}$ tels que $V_k = V_{k+\ell} \cap E_k$ et $x + V_{k+\ell} \subset U \cap E_{k+\ell}$. On remarque que pour tout $m \leq k$, $V_k \cap E_m$ est un voisinage ouvert de 0 dans E_m et donc en prenant $V := \bigcup_{\ell \geq 1} U_{k+\ell}$ on trouve que V est un voisinage de 0 pour E tel que $x + V \subset U$.

b) On a $\mathcal{T}|_{E_k} \subset \mathcal{T}_k$ car pour tout ouvert U de (E, \mathcal{T}) on a $U \cap E_k = J_k^{-1}(U) \in \mathcal{T}_k$ puisque l'injection canonique J_k est continue.

Inversement soit U_k un ouvert (convexe symétrique contenant 0 sans perte de généralité) de (E_k, \mathcal{T}_k) , et montrons qu'il existe un voisinage ouvert non vide U de 0 dans (E, \mathcal{T}) tel que $U_k = U \cap E_k$. On construit itérativement, par application du Lemme B.2.9, une suite croissante de convexes (que l'on peut supposer symétriques) $(U_{k+\ell})_{\ell \geq 1}$ tels que pour tout $\ell \geq 1$, $U_{k+\ell}$ est ouvert dans $E_{k+\ell}$ et $U_k = U_{k+\ell} \cap E_k$. L'ensemble $U := \bigcup_{\ell \geq 1} U_{k+\ell}$ contient 0, il est convexe parce que la suite $(U_{k+\ell})_{\ell \geq 1}$ est croissante, il est symétrique, et on a $U_k = U \cap E_k$ par construction. Donc U est un voisinage ouvert de 0 dans (E, \mathcal{T}) grâce à a), donc U convient.

c) Soit $x \neq 0$ un élément de E , montrons qu'il existe U voisinage ouvert de 0 dans \mathcal{T} tel que $x \notin U$ (il suffit de montrer que le singleton $\{0\}$ est fermé puisque la diagonale de $E \times E$ est alors fermée comme image réciproque de $\{0\}$ par l'application $(x, y) \mapsto x - y$). On sait qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in E_k$, et un ouvert convexe symétrique U_k contenant 0 tel que $x \notin U_k$. Comme dans le point b) on construit une suite croissante de convexes symétriques $(U_{k+\ell})_{\ell \geq 1}$ tels que $U_{k+\ell}$ est ouvert dans $E_{k+\ell}$ et $U_k = U_{k+\ell} \cap E_k$. L'ensemble $U := \bigcup_{\ell \geq 1} U_{k+\ell}$ est un voisinage ouvert non vide de 0 dans E et on a $U_k = U \cap E_k$ donc U ne contient pas x .

d) Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $x \in E \setminus E_k$, montrons qu'il existe U voisinage ouvert de 0 dans \mathcal{T} tel que $(x + U) \cap E_k = \emptyset$. Soit $m > k$ tel que $x \in E_m$. On sait que E_k est fermé dans E_m donc il existe un voisinage de 0 convexe symétrique U_m de \mathcal{T}_m tel que $(x + U_m) \cap E_k = \emptyset$. On construit comme ci-dessus une suite croissante de convexes symétriques $(U_{m+\ell})_{\ell \geq 1}$ tels que $U_{m+\ell}$ est ouvert dans $E_{m+\ell}$ et $U_m = U_{m+\ell} \cap E_m$. Par ailleurs $(x + U_{m+\ell}) \cap E_k = \emptyset$: en effet si $y \in (x + U_{m+\ell}) \cap E_k$ alors $y - x \in U_{m+\ell} \cap E_m = U_m$ ce qui est impossible. L'ensemble U réunion des $(U_{m+\ell})_{\ell \geq 1}$ est un voisinage ouvert de 0 dans (E, \mathcal{T}) tel que $(x + U) \cap E_k = \emptyset$. Donc E_k est fermé dans (E, \mathcal{T}) .

La proposition est démontrée. \square

Théorème B.2.11. Soit (E, \mathcal{T}) limite inductive d'une suite croissante (E_k, \mathcal{T}_k) d'espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E et $x \in E$. On a les équivalences

- a) (x_n) converge vers x dans E ;
- b) Il existe un entier k tel que $x \in E_k$ et $x_n \in E_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tel que (x_n) converge vers x dans E_k .

Démonstration. a) \implies b) : On remarque que l'on peut supposer que la famille (E_k) est strictement croissante. Supposons que (x_n) converge vers x dans E . Montrons qu'il existe k tel que $x_n \in E_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On aura alors $x \in E_k$ puisque E_k est fermé par la Proposition B.2.10 d). Supposons qu'il n'existe pas de tel k . Alors on peut construire des sous-suites k_ℓ et n_ℓ telles que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ on ait $x_{n_\ell} \in E_{k_{\ell+1}} \setminus E_{k_\ell}$ et $E_{k_{\ell+1}}$ strictement croissante. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, comme E_{k_ℓ} est fermé dans E il existe par le théorème de Hahn-Banach une forme linéaire $T_\ell \in E^*$ (pour la topologie \mathcal{T}) telle que

$$T_\ell|_{E_{k_\ell}} \equiv 0 \quad \text{et} \quad T_\ell(x_{n_\ell}) \neq 0.$$

Définissons sur E la fonction p par

$$\forall y \in E, \quad p(y) := \sum_{\ell \geq 0} \ell \frac{|T_\ell(y)|}{|T_\ell(x_{n_\ell})|}.$$

Cette somme est finie sur chaque E_k donc p est une semi-norme continue sur chaque E_k et donc sur E . En particulier la suite $(p(x_{n_\ell}))_\ell$ devrait être bornée puisque (x_{n_ℓ}) converge vers x , alors que par construction

$$p(x_{n_\ell}) \geq \ell.$$

On en déduit donc qu'il existe k tel que $x_n \in E_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x \in E_k$. On donc (x_n) converge vers x pour la topologie $\mathcal{T}|_{E_k}$ et donc dans (E_k, \mathcal{T}_k) par la Proposition B.2.10 b).

b) \implies a) : C'est une conséquence directe de la Proposition B.2.10 b).

Le théorème est démontré. □

Proposition B.2.12. Soit (E, \mathcal{T}) limite inductive d'une suite croissante (E_k, \mathcal{T}_k) d'espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés. Si chaque E_k est complet, alors E l'est aussi.

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy de (E, \mathcal{T}) et commençons par montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in E_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de remarquer que pour tout $p \in \mathcal{P}$ la suite $(p(x_n))$ est bornée puis procéder par l'absurde exactement comme dans la démonstration du Théorème B.2.11. Comme $\mathcal{T}|_{E_k} = \mathcal{T}_k$ on conclut que (x_n) est de Cauchy dans (E_k, \mathcal{T}_k) et elle converge donc par complétude de E_k . □

Corollaire B.2.13. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la topologie limite inductive des topologies de $\mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$ avec K_i suite exhaustive de compacts de Ω , est complet.

Proposition B.2.14. Soit (E, \mathcal{T}) limite inductive d'une suite (E_k, \mathcal{T}_k) strictement croissante d'espaces de Fréchet. Alors E n'est pas métrisable.

Démonstration. Chaque E_k est fermé dans E , et d'intérieur vide. En effet s'il existait k tel que E_k est d'intérieur non vide, E_k contiendrait un voisinage de 0 dans E ce qui impliquerait que $E_k = E$ (car pour tout $x \in E$ il existerait λ suffisamment petit tel que λx soit dans ce voisinage), ce qui est impossible puisque la suite (E_k) est strictement croissante. Mais E est complet donc s'il était métrisable, par le théorème de Baire on aurait $E = \bigcup E_k$ union dénombrable de fermés d'intérieur vide, donc serait d'intérieur vide ce qui est absurde. □

Proposition B.2.15. *Soit (E, \mathcal{T}) limite inductive d'une suite croissante (E_k, \mathcal{T}_k) d'espaces vectoriels topologiques localement convexes et soit T une forme linéaire sur E . Si chaque E_k est métrisable, alors T est continue si et seulement si elle est séquentiellement continue.*

Démonstration. Si T est séquentiellement continue, alors $T|_{E_k}$ est séquentiellement continue pour tout k et donc $T|_{E_k}$ est continue pour tout k , ce qui implique le résultat par le Lemme B.2.8. \square

On en déduit la généralisation suivante du théorème de Banach-Steinhaus A.1.13.

Théorème B.2.16. *Soit (E, \mathcal{T}) limite inductive d'une suite croissante (E_k, \mathcal{T}_k) d'espaces de Fréchet (de topologie associée à une famille de semi-normes \mathcal{P}_k) et F un pré-Fréchet (de topologie associée à une famille de semi-normes \mathcal{Q}). On considère une famille $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ d'applications linéaires continues de E dans F telles que pour tout $x \in E$, la famille $(T_\alpha x)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est bornée dans F . Alors pour tout $q \in \mathcal{Q}$ et tout k il existe $C > 0$, $\ell \in \mathbb{N}$ et p_1, \dots, p_ℓ dans \mathcal{P}_k tels que*

$$\forall x \in E_k, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}, \quad q(T_\alpha x) \leq C \sup_{1 \leq j \leq \ell} p_j(x).$$

B.3. Distributions

B.3.1. Définition, exemples et premières propriétés. La théorie des distributions a été formalisée par L. Schwartz dans les années 50, après des idées de Heaviside à la fin du dix-neuvième siècle, mais aussi Hadamard, Leray, Poincaré et Sobolev au début du vingtième siècle. Il s'agit de généraliser la notion de fonction et d'étendre la notion de dérivée à toute fonction localement intégrable.

Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, Ω sera un ouvert de \mathbb{R}^d . On munit $\mathcal{D}(\Omega)$ de la topologie définie au paragraphe précédent (Corollaire B.2.13).

Définition B.3.1. *Une distribution T sur Ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$*

$$T : \begin{array}{l} \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle. \end{array}$$

L'espace des distributions est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est parfois appelé espace de fonctions test.

La proposition suivante découle directement des propriétés vues dans le paragraphe précédent.

Proposition B.3.2. *On a les équivalences entre*

- T est une distribution sur Ω
- pour tout compact K de Ω il existe un entier m et une constante $C > 0$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup \left\{ |\partial^\alpha \varphi(x)|, x \in K, \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m \right\}$$

- T est séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$
- T est séquentiellement continue en 0.

Remarque. On rappelle que T est séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ si la propriété suivante est vérifiée : si $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (c'est-à-dire s'il existe un compact K tel que pour tout n , φ_n et φ sont à support dans K et $\partial^\alpha \varphi_n$ converge uniformément dans K vers $\partial^\alpha \varphi$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$), alors $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

Définition B.3.3. Si l'entier m ci-dessus peut être choisi indépendamment de K on dit que la distribution est d'ordre fini, et la plus petite valeur possible de m est l'ordre de la distribution.

Exemples. a) Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors l'application

$$T_f : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \int f(x)\varphi(x) dx$$

est une distribution d'ordre 0 sur Ω . On dit qu'une distribution T est une fonction s'il existe f dans $L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $T = T_f$. Remarquons que la relation d'équivalence " $f = g$ p.p." est exactement la même que la relation d'équivalence " f et g définissent la même distribution" (voir la Proposition B.2.6). Nous identifions donc toujours l'espace L^1_{loc} avec l'espace des distributions qu'il définit et nous noterons donc f pour la distribution qu'elle définit.

b) Soit $a \in \Omega$, on appelle masse de Dirac en a et l'on note δ_a la distribution d'ordre 0 définie par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

c) La distribution sur \mathbb{R} définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$$

est d'ordre infini.

Théorème B.3.4 (Valeur principale). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. L'intégrale

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x}$$

possède une limite lorsque ε tend vers zéro. L'application

$$vp\left(\frac{1}{x}\right) : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x}$$

est une distribution d'ordre 1, appelée valeur principale de $\frac{1}{x}$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et définissons la fonction continue

$$g(x) := \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \quad \text{et } g(0) := \varphi'(0).$$

Soit $R > 0$ tel que $\text{Supp } \varphi \subset [-R, R]$. Alors

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x} = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \varphi(x) \frac{dx}{x}$$

donc par imparité

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x} &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} g(x) dx + \varphi(0) \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{dx}{x} \\ &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} g(x) dx \longrightarrow \int_{|x| \leq R} g(x) dx, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d'où l'existence de la limite. Par ailleurs pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|g(x)| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |\varphi'(y)|$$

donc

$$\left| \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle \right| \leq 2R \sup_y |\varphi'(y)|$$

donc cette distribution est d'ordre au plus 1. Montrons qu'elle est d'ordre exactement 1. Par l'absurde sinon on aurait pour tout compact K de \mathbb{R}

$$\exists C > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}), \quad \left| \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle \right| \leq C \sup_y |\varphi(y)|. \quad (\text{B.2})$$

Soit alors la suite $\varphi_n(x)$ de fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, supportée dans $[0, 2]$ et à valeurs dans $[0, 1]$, définie par

$$\varphi_n(x) = 1 \quad \text{sur} \quad \left[\frac{1}{n}, 1 \right], \quad \varphi_n(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \left] -\infty, \frac{1}{2n} \right] \cup [2, \infty[.$$

Alors pour tout $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2n}$ on a

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x} dx \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x} dx = \log(n)$$

donc

$$\left| \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi_n \right\rangle \right| \geq \log(n)$$

ce qui rend impossible l'inégalité (B.2). Le théorème B.3.4 est démontré. \square

Définition B.3.5. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que (T_n) converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad n \rightarrow \infty.$$

Lemme B.3.6. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telles que

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}(\Omega), \quad \text{et} \quad T_n \rightarrow T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Alors

$$\langle T_n, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

Démonstration. Soit K un compact de Ω tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Supp } \varphi_n \subset K \quad \text{et} \quad \text{Supp } \varphi \subset K,$$

et $\partial^\alpha \varphi_n$ converge uniformément dans K vers $\partial^\alpha \varphi$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$. On écrit

$$\langle T_n, \varphi_n \rangle - \langle T, \varphi \rangle = \langle T_n - T, \varphi \rangle + \langle T_n, \varphi_n - \varphi \rangle$$

et on remarque que le premier terme tend vers zéro par hypothèse. Le second tend vers zéro aussi grâce au théorème de Banach-Steinhaus B.2.16 : en effet comme $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors en particulier pour tout compact K' et toute fonction $\phi \in \mathcal{D}_{K'}(\Omega)$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle T_n, \phi \rangle| < \infty.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus B.2.16 implique alors que pour tout compact K' il existe une constante C et un entier m tels que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}_{K'}(\Omega)$ on a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle T_n, \phi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K'} |\partial^\alpha \phi|.$$

Il suffit d'appliquer ce résultat à $K' := K$ et $\phi := \varphi_n - \varphi$ pour conclure. \square

Proposition B.3.7. Soit ζ_ε une suite régularisante au sens de la Définition B.2.3. Alors

$$\zeta_\varepsilon \rightarrow \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et calculons

$$I_\varepsilon := \int \zeta_\varepsilon \varphi(x) dx.$$

Comme ζ_ε est d'intégrale 1 on a

$$I_\varepsilon = \int \zeta_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \varphi(0)$$

et

$$\left| \int \zeta_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \leq C\varepsilon \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\nabla \varphi(x)|$$

ce qui démontre le résultat. \square

Remarque. Dans la démonstration de la Proposition B.3.7 il n'est pas nécessaire que la fonction ζ définissant la suite régularisante soit à support compact. Par exemple la fonction

$$\rho_\varepsilon : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon^d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \rho(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

vérifie de même

$$\rho_\varepsilon \rightarrow \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (\text{B.3})$$

Remarque. Le produit usuel de deux fonctions réelles ne se généralise pas aux distributions. Par exemple il est impossible de donner un sens à δ_a^2 . En effet on peut considérer la suite de fonctions sur \mathbb{R} définie par $f_n(x) = n$ sur $[0, 1/n]$ et 0 ailleurs. La suite f_n converge au sens des distributions vers δ_0 (voir la démonstration de la Proposition B.3.7), alors que f_n^2 n'a pas de limite.

Définition B.3.8 (Produit $C^\infty \times \mathcal{D}'$). Soit $\psi \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle produit de T par ψ et l'on note ψT la distribution définie par

$$\langle \psi T, \varphi \rangle := \langle T, \psi \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemple. Pour toute fonction ψ de classe C^∞ dans un ouvert de \mathbb{R}^d contenant a , on a

$$\psi \delta_a = \psi(a) \delta_a.$$

B.3.2. Distributions à support compact.

Définition B.3.9. Soit U un ouvert de Ω et soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $T_1 = T_2$ sur U si

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Soit $a \in U$. On dit que T_1 et T_2 sont égales au voisinage de a s'il existe un voisinage ouvert de a dans Ω sur lequel $T_1 = T_2$.

Définition B.3.10 (Support d'une distribution). Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle support de T et l'on note $\text{Supp } T$ le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert sur lequel T est nulle. On dit que T est à support compact si son support est compact. On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact sur Ω ,

Exemple. On a $\text{Supp } \delta_a = \{a\}$.

Lemme B.3.11 (Produit $\mathcal{D} \times \mathcal{D}'$). Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors ψT est un élément de $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Démonstration. Soit K le support de ψ et montrons que la distribution ψT est à support dans K . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support en dehors de K (au sens où $\text{Supp } \varphi \cap K = \emptyset$) alors il suffit de remarquer que par construction $\varphi\psi = 0$ et donc

$$\langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi\varphi \rangle = 0.$$

Le lemme est démontré. \square

Proposition B.3.12. *Les distributions à support compact sont d'ordre fini.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et soit une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\psi|_{\text{Supp } T} \equiv 1.$$

On pose $K' := \text{Supp } \psi$. Soit K un compact inclus dans Ω et une fonction $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Alors on écrit

$$\varphi = \psi\varphi + (1 - \psi)\varphi$$

et le support de la fonction $(1 - \psi)\varphi$ est inclus dans le complémentaire du support de T . On a donc

$$\langle T, (1 - \psi)\varphi \rangle = 0.$$

Comme $\text{Supp } (\psi\varphi) \subset K'$ on a donc

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &= |\langle T, \psi\varphi \rangle| \\ &\leq C_{K'} \sup_{|\alpha| \leq m_{K'}} \|\partial^\alpha (\psi\varphi)\|_{L^\infty} \\ &\leq C'_{K'} \sup_{|\alpha| \leq m_{K'}} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

La distribution T est donc d'ordre au plus $m_{K'}$. \square

Remarque. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est nulle sur le support de T , on n'a pas nécessairement $\langle T, \varphi \rangle = 0$. On peut considérer par exemple sur \mathbb{R} la distribution définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, \varphi \rangle := \varphi'(0)$$

qui est à support réduit au point $\{0\}$, et la fonction $\varphi(x) := x\psi(x)$ avec $\psi \in \mathcal{D}(-2, 2]$ égale à 1 sur $[-1, 1]$. On a alors $\varphi(0) = 0$ alors que $\langle T, \varphi \rangle = 1$.

Proposition B.3.13. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution d'ordre m et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nulle sur le support de T ainsi que ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à m . Alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.*

Démonstration. Soit K' un voisinage compact du support de φ et soit $K := K' \cap \text{Supp } T$. Soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ à valeurs dans $[0, 1]$, nulle si $d(x, K) > 3/n$ et telle que

$$\psi_n(x) = 1 \quad \text{si} \quad d(x, K) \leq \frac{1}{n}$$

et telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe une constante C telle que

$$|\partial^\alpha \psi_n(x)| \leq Cn^{|\alpha|}. \quad (\text{B.4})$$

Par exemple on choisit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ positive, à support dans $B(0, 1)$ et d'intégrale 1 et on pose $\psi_n(x) := \mathbf{1}_{K_n} * n^d \rho(n \cdot)$ avec $K_n := \{x \in \Omega / d(x, K) \leq 2/n\}$.

Le support de la fonction $\varphi(1 - \psi_n)$ est inclus dans K' et est disjoint de K , donc disjoint de $\text{Supp } T$. Par définition du support de T on a donc

$$\langle T, \varphi(1 - \psi_n) \rangle = 0$$

donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi\psi_n \rangle.$$

Mais T est d'ordre m donc il existe $M > 0$ telle que

$$|\langle T, \varphi\psi_n \rangle| \leq M \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha(\varphi\psi_n)(x)|.$$

Montrons que pour $|\alpha| \leq m$

$$\sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha(\varphi\psi_n)(x)| \leq Cn^{|\alpha|-m-1} \quad (\text{B.5})$$

si n est assez grand, avec C une constante uniforme en n , ce qui démontrera le résultat souhaité. Notons que si $x \in \text{Supp}(\varphi\psi_n)$ alors soit $x \in K$ auquel cas $\partial^\beta\varphi(x) = 0$ pour tout $|\beta| \leq m$, soit $x \in \text{Supp}(\varphi\psi_n) \setminus K$ et alors la formule de Taylor (appliquée en un point $a \in K$ tel que $d(x, K) = |x - a|$) implique que pour tout $|\beta| \leq m$ on a

$$|\partial^\beta\varphi(x)| \leq C|x - a|^{m+1-|\beta|} \leq Cn^{|\beta|-m-1}.$$

Alors on écrit la formule de Leibniz

$$\partial^\alpha(\varphi\psi_n)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}\psi_n(x) \partial^\beta\varphi(x),$$

et donc si $|\alpha| \leq m$ et par (B.4) il vient

$$|\partial^\alpha(\varphi\psi_n)(x)| \leq C \sum_{\beta \leq \alpha} n^{|\alpha|-|\beta|} \sup_{d(x,K) \leq \frac{3}{n}} |\partial^\beta\varphi(x)|$$

et donc

$$|\partial^\alpha(\varphi\psi_n)(x)| \leq C' \sum_{\beta \leq \alpha} n^{|\alpha|-|\beta|} n^{|\beta|-m-1}.$$

On a donc (B.5), et la proposition est démontrée. \square

Proposition B.3.14. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nulle sur le support de T ainsi que ses dérivées partielles de tout ordre. Alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.*

Démonstration. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de K_n . Alors $\psi_n T$ est une distribution à support compact grâce au Lemme B.3.11. Mais alors $\psi_n T$ est d'ordre m_n fini par la Proposition B.3.12. Par ailleurs le support de $\psi_n T$ est inclus dans le support de T . On en déduit que φ et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre m_n sont nulles sur le support de $\psi_n T$ et donc par la Proposition B.3.13

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \langle \psi_n T, \varphi \rangle = 0.$$

Mais il existe n_0 tel que le support de φ soit inclus dans K_{n_0} , donc $\psi_{n_0}\varphi = \varphi$ et alors

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi_{n_0}\varphi \rangle = \langle \psi_{n_0} T, \varphi \rangle = 0.$$

La proposition est démontrée. \square

Théorème B.3.15. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Pour toute fonction φ dans $C^\infty(\Omega)$, la valeur $\langle T, \chi\varphi \rangle$ est indépendante du choix de $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ égale à 1 sur un voisinage ouvert de $\text{Supp} T$. On définit donc*

$$\langle T, \varphi \rangle := \langle T, \chi\varphi \rangle$$

pour toute telle χ .

Démonstration. Soient χ_1 et χ_2 deux fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ égales à 1 respectivement sur U_1 et U_2 deux voisinages ouverts de $\text{Supp } T$. Alors elles sont égales sur $U_1 \cap U_2$ qui est un voisinage ouvert de $\text{Supp } T$. Soit $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, alors

$$\text{Supp}((\chi_1 - \chi_2)\varphi) \cap \text{Supp } T = \emptyset.$$

Donc $(\chi_1 - \chi_2)\varphi$ est nulle, ainsi que toutes ses dérivées, sur $\text{Supp } T$. D'après la Proposition B.3.14 on déduit que

$$\langle T, (\chi_1 - \chi_2)\varphi \rangle = 0,$$

d'où le résultat. \square

Corollaire B.3.16 (Dualité $\mathcal{E}'(\Omega) - C^\infty(\Omega)$). *On peut identifier $\mathcal{E}'(\Omega)$ au dual topologique de l'espace de Fréchet $C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. On rappelle qu'on munit l'espace de Fréchet $C^\infty(\Omega)$ d'une famille de semi-normes

$$p_{j,m}(\varphi) := \sup_{x \in K_j} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

En effet le Théorème B.3.16 montre que toute distribution T dont le support est compact est la restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une unique forme linéaire continue S sur $C^\infty(\Omega)$. Inversement toute restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une forme linéaire S continue sur $C^\infty(\Omega)$ est une distribution à support compact : si une distribution T est à support non compact alors il existe une suite (φ_n) de $\mathcal{D}(\Omega)$ dont le support est disjoint de $B(0, n)$ et telle que $\langle T, \varphi_n \rangle = 1$, ce qui est impossible puisque $\langle S, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$. \square

B.4. Dérivation des distributions

Définition B.4.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. La dérivée $\partial^\alpha T$ d'ordre α de T est la distribution définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Remarque. Si T est d'ordre m alors $\partial^\alpha T$ est d'ordre au plus $m + |\alpha|$ mais elle peut être d'ordre strictement inférieur. Par exemple les distributions x^n sont d'ordre 0 pour tout n .

Proposition B.4.2. *Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ convergeant vers une distribution T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la suite de distributions $(\partial^\alpha T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\partial^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\langle \partial^\alpha T_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, \partial^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle.$$

La proposition est démontrée. \square

Exemples.

a) Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. La distribution $\partial^\alpha \delta_a$ est définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \partial^\alpha \delta_a, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(a).$$

Elle est d'ordre $|\alpha|$ et son support est $\{a\}$. Pour vérifier que l'ordre est exactement $|\alpha|$ on peut considérer (avec $a = 0$ et $d = 1$ pour simplifier) la suite de fonctions $\varphi_n(x) := x^\alpha \psi(nx)$ avec $\psi \in \mathcal{D}([-1, 1])$ égale à 1 près de 0. On a

$$\langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi_n \rangle = \alpha!$$

alors que pour tout $\beta < \alpha$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} |\partial^\beta (x^\alpha \psi(nx))| = 0.$$

b) Sur \mathbb{R} on a

$$x\delta'_0 = -\delta_0.$$

c) Soit la fonction de Heaviside définie par

$$H(x) = 0 \quad \text{si } x \leq 0, \quad H(x) = 1 \quad \text{si } x > 0.$$

Alors $H' = \delta_0$.

Proposition B.4.3. *La distribution vp définie au Théorème B.3.4 est la dérivée de la fonction $x \mapsto \log|x|$ (qui est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$).*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\langle (\log|\cdot|)', \varphi \rangle = -\langle \log|\cdot|, \varphi' \rangle = -\int \log|x| \varphi'(x) dx.$$

Mais

$$\int \log|x| \varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \log|x| \varphi'(x) dx,$$

et par intégration par parties on a

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \log|x| \varphi'(x) dx = -\int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x} - \log \varepsilon (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)).$$

En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, comme φ est dérivable en 0 on obtient

$$\int \log|x| \varphi'(x) dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x}$$

ce que l'on voulait démontrer. □

On note $x_+ := \max(x, 0)$. On définit la distribution partie finie pour identifier à des distributions les fonctions x_+^s , qui ne sont pas sommables pour $s \leq -1$.

Définition B.4.4 (Partie finie). *Soit $s \in]-2, -1[$. La partie finie de x_+^s est la distribution $pf(x_+^s)$, d'ordre 1, définie par*

$$\langle pf(x_+^s), \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{x \geq \varepsilon} x^s \varphi(x) dx + \frac{\varepsilon^{s+1}}{s+1} \varphi(\varepsilon) \right) = -\int_0^\infty \frac{x^{s+1}}{s+1} \varphi'(x) dx.$$

On définit de même pour $s \in]-n-1, -n[$ la partie finie de x_+^s la distribution $pf(x_+^s)$, d'ordre n , définie par

$$\langle pf(x_+^s), \varphi \rangle := (-1)^n \int_0^\infty \frac{x^{s+n}}{(s+1) \dots (s+n)} \varphi^{(n)}(x) dx.$$

Exercice. On définit sur \mathbb{R} la partie finie de x^{-2} par

$$pf\left(\frac{1}{x^2}\right) := -vp'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que

$$x pf\left(\frac{1}{x^2}\right) = vp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Théorème B.4.5. *Soit $a \in \mathbb{R}^d$. Les distributions sur \mathbb{R}^d dont le support est $\{a\}$ sont les combinaisons linéaires de dérivées de la masse de Dirac en a .*

Démonstration. Soit T une distribution dont le support est réduit à $\{a\}$. On sait d'après la Proposition B.3.12 que T est d'ordre fini, noté m . D'après la formule de Taylor, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(a) + R(x)$$

avec pour tout α tel que $|\alpha| \leq m$,

$$\partial^\alpha R(a) = 0.$$

Alors par la Proposition B.3.13 on a

$$\langle T, R \rangle = 0.$$

En utilisant le Théorème B.3.16 pour donner un sens à $\langle T, (x-a)^\alpha \rangle$, on a donc

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \langle T, \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(a) \rangle + \langle T, R \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \langle T, (x-a)^\alpha \rangle \partial^\alpha \varphi(a). \end{aligned}$$

En d'autres termes on a

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle T, (x-a)^\alpha \rangle \partial^\alpha \delta_a,$$

et le théorème est démontré. \square

Lemme B.4.6. Soit T une distribution sur \mathbb{R}^d telle que $\partial_k T \equiv 0$ pour $k \in \{1, \dots, d\}$. Alors T est une fonction constante.

Démonstration. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ d'intégrale 1 et soit $\lambda := \langle T, \psi \rangle$. On va montrer que $\langle T, \varphi \rangle = \lambda$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ la fonction

$$\tilde{\varphi} := \varphi - \langle 1, \varphi \rangle \psi$$

est d'intégrale nulle. Admettons provisoirement le lemme suivant.

Lemme B.4.7. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction d'intégrale nulle. Alors il existe d fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\varphi = \sum_{j=1}^d \partial_j \varphi_j.$$

Du lemme ci-dessus on déduit qu'il existe d fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^d \partial_j \varphi_j.$$

Alors

$$\langle T - \lambda, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T, \psi \rangle \langle 1, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle$$

donc

$$\langle T - \lambda, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^d \langle T, \partial_j \varphi_j \rangle = - \sum_{j=1}^d \langle \partial_j T, \varphi_j \rangle = 0.$$

Le Lemme B.4.6 est démontré. \square

Démonstration du Lemme B.4.7. On raisonne par récurrence sur la dimension d . Dans le cas où $d = 1$, la fonction

$$\varphi_1(x) := \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy$$

est de classe C^∞ , à support compact, et elle vérifie $\varphi = \varphi_1'$.

Supposons maintenant le résultat vrai en dimension $d-1$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ de moyenne nulle. Il n'est pas difficile de voir que la fonction

$$\psi(x_1, \dots, x_{d-1}) := \int \varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, y) dy$$

est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1})$ de moyenne nulle donc par l'hypothèse de récurrence il existe $\psi_1, \dots, \psi_{d-1}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1})$ telles que

$$\psi = \sum_{j=1}^{d-1} \partial_j \psi_j.$$

Soit alors $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction d'intégrale 1 et considérons la fonction Φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\Phi(x_1, \dots, x_d) := \int_{-\infty}^{x_d} \left(\varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, y) - \psi(x_1, \dots, x_{d-1}) \zeta(y) \right) dy.$$

On a alors

$$\partial_d \Phi(x_1, \dots, x_d) = \varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) - \psi(x_1, \dots, x_{d-1}) \zeta(x_d)$$

donc

$$\varphi(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j=1}^{d-1} \partial_j (\psi_j(x_1, \dots, x_{d-1}) \zeta(x_d)) + \partial_d \Phi(x_1, \dots, x_d).$$

Le lemme est démontré. □

Dans l'énoncé suivant, pour tout $y \in \mathbb{R}^p$ la notation

$$\langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle$$

désigne $\langle T, \varphi_y \rangle$ où $\varphi_y \in \mathcal{D}(\Omega)$ est la fonction définie par

$$\varphi_y(x) := \varphi(x, y).$$

Proposition B.4.8 (Dérivation sous le crochet). *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , et K un compact de Ω . Soit T une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et φ une fonction de $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^p)$ telle que pour tout $y \in \mathbb{R}^p$, φ_y soit à support dans K . Alors la fonction*

$$F : y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^p et l'on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^p$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}^p$

$$\partial_y^\alpha F(y_0) = \langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y_0) \rangle.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que F est continue sur \mathbb{R}^p . En effet si y_0 est un élément de \mathbb{R}^p et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de \mathbb{R}^p convergeant vers 0, alors en posant

$$\varphi_n(x) := \varphi(\cdot, y_0 + h_n) - \varphi(\cdot, y_0)$$

on a

$$F(y_0 + h_n) - F(y_0) = \langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

puisque φ_n converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Montrons maintenant le résultat pour $|\alpha| = 1$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^p$, nous allons montrer que la différentielle de F en y_0 est l'application

$$h \in \mathbb{R}^p \mapsto \langle T, \nabla_y \varphi(\cdot, y_0) \cdot h \rangle.$$

Soit donc $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^p convergeant vers 0 et montrons que la suite

$$\frac{1}{|h_n|} \left(F(y_0 + h_n) - F(y_0) - \langle T, \nabla_y \varphi(\cdot, y_0) \cdot h_n \rangle \right)$$

converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Il suffit de remarquer que la suite de fonctions

$$\varphi_n^1(x) := \frac{1}{|h_n|} (\varphi_n(x) - \nabla_y \varphi(x, y_0) \cdot h_n)$$

converge vers la fonction nulle dans $\mathcal{D}(\Omega)$. On a donc

$$\langle T, \varphi_n^1 \rangle \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

donc F est différentiable sur \mathbb{R}^p et ses dérivées partielles sont

$$\partial_{y_j} F(y_0) = \langle T, \partial_{y_j} \varphi(\cdot, y_0) \rangle$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^p$. L'argument s'itère par récurrence sur l'ordre de dérivation (en itérant la formule de Taylor pour obtenir la continuité, puis la différentiabilité à l'ordre suivant). \square

Proposition B.4.9 (Intégration sous le crochet). *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , T une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et φ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}^p)$. Alors*

$$\int \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle dy = \langle T, \int \varphi(\cdot, y) dy \rangle.$$

Démonstration. On traite le cas $d = p = 1$, le cas général s'obtient ensuite par récurrence sur p en utilisant le théorème de Fubini. Soit R un réel positif tel que φ soit à support dans $[-R, R]^2$.

Soit ζ une fonction C^∞ sur \mathbb{R} d'intégrale 1, supportée dans $[-R, R]$, et soit

$$\psi(x, y) := \varphi(x, y) - \zeta(y) \int \varphi(x, y') dy'.$$

On a

$$\langle T, \psi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle - \zeta(y) \langle T, \int \varphi(\cdot, y) dy \rangle,$$

donc il s'agit de montrer que

$$\int \langle T, \psi(\cdot, y) \rangle dy = 0.$$

La fonction ψ est de classe C^∞ sur $\Omega \times \mathbb{R}$, à support dans $[-R, R]^2$, et

$$\int \psi(x, y) dy = 0$$

pour tout $x \in \Omega$. On en déduit que la fonction

$$\Phi(x, y) := \int_{-\infty}^y \psi(x, y') dy'$$

est C^∞ sur $\Omega \times \mathbb{R}$, à support dans $[-R, R]^2$. Par la Proposition B.4.8 on a

$$\frac{d}{dy} \langle T, \Phi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \partial_y \Phi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \psi(\cdot, y) \rangle$$

d'où l'on déduit que l'application

$$y \mapsto \langle T, \Phi(\cdot, y) \rangle - \int_{-\infty}^y \langle T, \psi(\cdot, y') \rangle dy'$$

est constante. Mais $y \mapsto \langle T, \Phi(\cdot, y) \rangle$ et $y \mapsto \int_{-\infty}^y \langle T, \psi(\cdot, y') \rangle dy'$ sont identiquement nulles pour $y < -R$, donc ces deux fonctions sont égales. En particulier

$$\int \langle T, \psi(\cdot, y) \rangle dy = 0,$$

ce que l'on voulait démontrer. \square

La proposition suivante s'obtient en appliquant les règles de calcul différentiel usuel, par dualité.

Proposition B.4.10. *Soient Ω et Ω' deux ouverts de \mathbb{R}^d et soit T une distribution dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors pour toute fonction f de $C^\infty(\Omega)$ on a*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \partial^\alpha (fT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta T.$$

Pour tout difféomorphisme $\phi \in C^\infty(\Omega', \Omega)$ on définit

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T \circ \phi, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \circ \phi^{-1} | \det D\phi(\phi^{-1}) |^{-1} \rangle,$$

où $D\phi(x)$ est la matrice jacobienne de ϕ au point $x \in \Omega'$. On a $T \circ \phi \in \mathcal{D}'(\Omega')$ et

$$\partial_j (T \circ \phi) = \sum_{k=1}^d (\partial_j \phi_k) (\partial_k T \circ \phi).$$

B.5. Autres exemples de distributions

B.5.1. Mesures de Radon.

Définition B.5.1. *Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite positive si pour toute fonction φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ on a*

$$\varphi \geq 0 \text{ dans } \Omega \implies \langle T, \varphi \rangle \geq 0.$$

Théorème B.5.2 (Ordre des distributions positives). *Si T est une distribution positive sur Ω alors T est d'ordre 0.*

Démonstration. Soit K un compact de Ω et soit ψ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ à valeurs dans $[0, 1]$ et égale à 1 sur K . Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ on a

$$\forall x \in \Omega, \quad - \sup_{y \in K} |\varphi(y)| \psi(x) \leq \varphi(x) \leq \sup_{y \in K} |\varphi(y)| \psi(x).$$

Comme T est positive on en déduit que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \langle T, \psi \rangle \sup_{x \in K} |\varphi(x)|,$$

et on a le résultat cherché. \square

Définition B.5.3. *Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et K un compact de Ω . On note $\mathcal{M}(K)$ (resp. $\mathcal{M}_{loc}(\Omega)$) l'ensemble des formes linéaires continues sur $C(K)$ (resp. $C_c(\Omega)$ muni de sa topologie inductive). L'espace $\mathcal{M}_{loc}(\Omega)$ est appelé espace des mesures de Radon. Une forme linéaire T sur $C_c(\Omega)$ est donc une mesure de Radon si et seulement si pour tout K compact de Ω , il existe une constante C telle que pour toute fonction $\varphi \in C_K(\Omega)$*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in K} |\varphi(x)|.$$

On rappelle qu'une mesure borélienne sur un compact K de \mathbb{R}^d est une fonction positive, σ -additive sur la tribu borélienne de K . On admet le théorème suivant.

Théorème B.5.4 (Riesz(-Radon-Markov) (\sim 1913)). Soit μ une mesure borélienne localement finie sur Ω ouvert de \mathbb{R}^d . On définit la mesure de Radon positive T_μ sur $C_c(\Omega)$ par

$$\langle T_\mu, f \rangle := \int_{\Omega} f d\mu, \quad \forall f \in C_c(\Omega).$$

Alors pour toute mesure de Radon positive T sur $C_c(\Omega)$ il existe une unique mesure borélienne localement finie μ sur Ω telle que $T = T_\mu$.

Théorème B.5.5. Si T est une distribution positive sur Ω alors T est une mesure de Radon positive.

Démonstration. Vérifions que T se prolonge de manière unique en une forme linéaire positive continue sur $C_c(\Omega)$. Le Théorème B.5.2 implique que pour tout compact K il existe une constante C telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ supportée dans K on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in K} |\varphi(x)|.$$

On conclut alors par densité : si $g \in C_c(\Omega)$ est à support dans un compact K de Ω on considère une suite (g_n) dans $\mathcal{D}(\Omega)$, supportée dans K et qui converge uniformément vers g . La suite $(\langle T, g_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et l'on définit un prolongement de T à $C_c(\Omega)$ par la distribution

$$\langle \bar{T}, g \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, g_n \rangle.$$

La positivité de \bar{T} se vérifie facilement, il reste à vérifier que le prolongement est unique. Soit S une forme linéaire positive sur $C_c(\Omega)$ (qui est donc une forme linéaire continue pour la convergence uniforme par les mêmes arguments que ci-dessus pour le théorème B.5.2) qui coïncide avec T sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors S et \bar{T} coïncident sur $\mathcal{D}_K(\Omega)$ pour tout compact K puisque S et \bar{T} coïncident avec T sur tout compact : on conclut par densité de $\mathcal{D}_{K_j}(\Omega)$ dans $C_c(\Omega)$ pour $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ suite exhaustive de compacts. \square

B.5.2. Mesure de surface et distributions de simple couche. Dans ce paragraphe nous donnons quelques exemples de mesures de surface, sans donner tous les détails des calculs qui relèvent de la géométrie différentielle. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on notera souvent $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$ la projection de x sur \mathbb{R}^{d-1} . On rappelle qu'un graphe (de dimension $d-1$ et de classe C^1) est un sous-ensemble Γ de \mathbb{R}^{d-1} tel que dans une certaine base (e_1, \dots, e_d) et pour un certain ouvert Ω' de \mathbb{R}^{d-1} , on ait

$$\Gamma = \left\{ \sum_{j=1}^{d-1} x_j e_j + f(x') e_d, \quad x' = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \Omega' \right\},$$

avec $f \in C^1(\Omega'; \mathbb{R})$. On admet que si Γ est défini par $(e_j), \Omega', f$ (on dit que $(e_j), \Omega', f$ est une présentation de Γ), si $a \in \Gamma$ et H est l'hyperplan tangent en a alors pour toute base $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_d)$ telle que \bar{e}_d n'est pas parallèle à H , il existe un voisinage V de a dans \mathbb{R}^d , un voisinage $\bar{\Omega}'$ de \bar{a}' dans \mathbb{R}^{d-1} (où $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_d$ sont les coordonnées de a dans la base $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_d)$) et une application ψ de classe C^1 de $\bar{\Omega}'$ dans \mathbb{R} tel que $\Gamma \cap V$ soit un graphe, de présentation $(\bar{e}_j), \bar{\Omega}', \psi$.

Une hypersurface (de classe C^1) de \mathbb{R}^d est un sous-ensemble Σ de \mathbb{R}^d tel que pour tout $a \in \Sigma$, il existe un voisinage ouvert ω de a dans \mathbb{R}^d tel que $\Sigma \cap \omega$ soit un graphe. En notant $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$, on définit l'élément de surface sur Σ en $(x', f(x'))$ par

$$d\sigma := \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2} dx'. \quad (\text{B.6})$$

Etant donnée une fonction $\gamma \in C(\Sigma)$, la forme linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \int_{\Sigma} \varphi \gamma \, d\sigma \end{aligned}$$

est une distribution d'ordre 0. On l'appelle distribution de simple couche de densité γ portée par Σ . Dans le cas particulier où $\gamma = 1$, on appelle la distribution de simple couche correspondante la mesure de surface portée par Σ . On la note parfois σ .

Enfin donnons la définition d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ à bord de classe C^r , avec $r \geq 1$: on suppose que sa frontière $\partial\Omega$ est une hypersurface de \mathbb{R}^d de classe C^r , et localement Ω est d'un seul côté de sa frontière au sens où pour tout $x_0 \in \partial\Omega$ il existe un ouvert ω contenant x_0 et une fonction $\rho \in C^r(\omega)$ dont le gradient ne s'annule pas dans ω , tels que

$$\partial\Omega \cap \omega = \{x \in \omega / \rho(x) = 0\} \quad \text{et} \quad \Omega \cap \omega = \{x \in \omega / \rho(x) < 0\}.$$

Le vecteur unitaire normal en tout point $y \in \partial\Omega$ pointant vers l'extérieur de Ω est donné par (on admet que cela ne dépend pas du choix de la fonction ρ ni de ω)

$$\nu(y) := \frac{\nabla \rho(y)}{|\nabla \rho(y)|}, \quad y \in \partial\Omega \cap \omega.$$

Notons que des résultats globaux peuvent être obtenus en recollant les résultats locaux grâce à des partitions de l'unité.

B.5.3. Formule des sauts. Le résultat suivant est une généralisation de la formule de Green-Riemann en dimension quelconque.

Théorème B.5.6 (formule de Green (~ 1830)). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^1 et soit V un champ de vecteurs de classe C^1 à support compact sur $\bar{\Omega}$. Alors*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} V \, dx = \int_{\partial\Omega} V \cdot \nu \, d\sigma$$

où ν est le vecteur unitaire normal au point x de $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur de Ω et où $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

Ce théorème s'interprète au sens des distributions de la manière suivante.

Théorème B.5.7 (formule de Green dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^2 . Alors pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ on a*

$$\partial_j(\mathbf{1}_{\Omega}) = -\nu_j \sigma,$$

où ν est le vecteur unitaire normal au point x de $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur de Ω et où $\sigma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est la distribution de simple couche portée par $\partial\Omega$.

Remarque. En fait le vecteur ν n'est pas une fonction régulière donc il faudrait généraliser la notion de produit d'une fonction f et d'une distribution T pour donner un sens à $\nu_j \sigma$. On remarque tout d'abord qu'il suffit que la fonction f soit bien définie au voisinage du support de T , ce qui est le cas ici (voir le lemme suivant) ; par ailleurs soit on suppose que le bord est de classe C^∞ , soit on généralise le produit en remarquant qu'il suffit que f soit de classe C^k si T est d'ordre k . Nous ne détaillerons pas ce point ici.

Avant de démontrer le Théorème B.5.7, montrons deux lemmes préparatoires.

Lemme B.5.8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^1 , alors pour tout $1 \leq j \leq d$, le support de la distribution $\partial_j(\mathbf{1}_{\Omega})$ est inclus dans $\partial\Omega$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$B_\infty(x_0, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^d, \max_{1 \leq j \leq d} |x_j - x_{0j}| < \delta\}$$

soit inclus dans $\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$. Soit alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ supportée dans $B_\infty(x_0, \delta)$, on a

$$\langle \partial_j(\mathbf{1}_\Omega), \varphi \rangle = - \int_\Omega \partial_j \varphi(x) dx.$$

D'une part si $x_0 \notin \Omega$ alors $B_\infty(x_0, \delta) \cap \Omega = \emptyset$ donc cette intégrale est nulle. D'autre part si $x_0 \in \Omega$ alors $B_\infty(x_0, \delta) \subset \Omega$ et en notant $x' := (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d)$, on a par le théorème de Fubini

$$\langle \partial_j(\mathbf{1}_\Omega), \varphi \rangle = - \int \dots \int \left(\int_{x_{0j}-\delta}^{x_{0j}+\delta} \partial_j \varphi(x) dx_j \right) dx' = 0.$$

On a donc $x_0 \notin \text{Supp } \partial_j(\mathbf{1}_\Omega)$ et le résultat suit. \square

Lemme B.5.9. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^2 , et soit ν le vecteur unitaire normal de $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur de Ω . Alors la mesure de surface (B.6) sur $\partial\Omega$ est la distribution

$$\sigma = -\nu \cdot \nabla \mathbf{1}_\Omega.$$

Démonstration. On démontre le résultat en dimension 2 pour simplifier, avec le bord de Ω défini par le graphe $x_2 = f(x_1)$ avec f de classe C^2 sur \mathbb{R} , et on a donc

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 / \rho(x) := x_2 - f(x_1) < 0\}.$$

On note que

$$\nabla \rho(x) = \begin{pmatrix} -f'(x_1) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, montrons que

$$\langle -\nu \cdot \nabla \mathbf{1}_\Omega, \varphi \rangle = \int \varphi(x_1, f(x_1)) \sqrt{f'(x_1)^2 + 1} dx_1.$$

On a

$$I := \langle -\nu \cdot \nabla \mathbf{1}_\Omega, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^2 \int_\Omega \partial_j \left(\frac{\partial_j \rho(x)}{|\nabla \rho(x)|} \varphi(x) \right) dx.$$

On peut supposer que φ est nulle à l'extérieur d'un petit voisinage de $\partial\Omega$ et en notant $\text{Supp } \varphi \subset [-R, R]^2$ on peut écrire

$$I = I_1 + I_2$$

avec

$$I_1 := \int_{-R}^R \int_{-R}^{f(x_1)} \partial_1 \left(\frac{\partial_1 \rho(x)}{|\nabla \rho(x)|} \varphi(x) \right) dx_2 dx_1 \quad \text{et} \quad I_2 := \int_{-R}^R \int_{-R}^{f(x_1)} \partial_2 \left(\frac{\partial_2 \rho(x)}{|\nabla \rho(x)|} \varphi(x) \right) dx_2 dx_1.$$

D'une part on a

$$I_2 = \int_{-R}^R \frac{\varphi(x_1, f(x_1))}{|\nabla \rho(x_1, f(x_1))|} dx_1.$$

Par ailleurs on peut écrire

$$I_1 = \int_{-R}^R \partial_1 \left(\int_{-R}^{f(x_1)} \frac{\partial_1 \rho(x_1, x_2)}{|\nabla \rho(x_1, x_2)|} \varphi(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 - \int_{-R}^R f'(x_1) \frac{\partial_1 \rho(x_1, f(x_1))}{|\nabla \rho(x_1, f(x_1))|} \varphi(x_1, f(x_1)) dx_1.$$

La première intégrale est nulle, et donc

$$\begin{aligned} I &= - \int_{-R}^R f'(x_1) \frac{\partial_1 \rho(x_1, f(x_1))}{|\nabla \rho(x_1, f(x_1))|} \varphi(x_1, f(x_1)) dx_1 + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x_1, f(x_1))}{|\nabla \rho(x_1, f(x_1))|} dx_1 \\ &= \int_{-R}^R \frac{f'(x_1)^2 + 1}{|\nabla \rho(x_1, f(x_1))|} \varphi(x_1, f(x_1)) dx_1 \\ &= \int_{-R}^R \varphi(x_1, f(x_1)) \sqrt{f'(x_1)^2 + 1} dx_1. \end{aligned}$$

Le lemme est démontré. \square

Démonstration du Théorème B.5.7. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 si $x \leq -1$ et nulle si $x \geq 0$. Soit ρ une fonction définissant le bord de Ω . On pose pour tout $R > 0$

$$\chi_R(x) := \chi(R\rho(x)).$$

Le théorème de convergence dominée implique que

$$\chi_R \longrightarrow \mathbf{1}_\Omega \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \quad R \rightarrow \infty.$$

On a alors grâce au Lemme B.5.9

$$-\nu_j \nu \cdot \nabla \chi_R \longrightarrow \nu_j \sigma \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \quad R \rightarrow \infty.$$

Il reste donc à montrer que

$$\nu_j \nu \cdot \nabla \chi_R \longrightarrow \partial_j \mathbf{1}_\Omega \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \quad R \rightarrow \infty.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, supportée près de $\partial\Omega$, on a

$$\langle \nu_j \nu \cdot \nabla \chi_R, \varphi \rangle = R \int \chi'(R\rho(x)) \nu(x) \cdot \nabla \rho(x) \nu_j(x) \varphi(x) dx.$$

Mais

$$\nu(x) \cdot \nabla \rho(x) = |\nabla \rho(x)|$$

donc

$$\langle \nu_j \nu \cdot \nabla \chi_R, \varphi \rangle = R \int \chi'(R\rho(x)) \partial_j \rho(x) \varphi(x) dx$$

et donc

$$\langle \nu_j \nu \cdot \nabla \chi_R, \varphi \rangle = \int \partial_j (\chi_R(x)) \varphi(x) dx = \langle \partial_j \chi_R, \varphi \rangle$$

et le résultat suit en prenant la limite $R \rightarrow \infty$. \square

Exercice. Soit f de classe C^1 par morceaux sur l'intervalle $]a, b[$. On note par $(a_i)_{0 \leq i \leq N}$ l'ensemble des points de $[a, b]$ (avec $a_0 = a$ et $a_N = b$) tels que dans chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$, la fonction f est de classe C^1 , et f et f' se prolongent continûment dans les intervalles $]a_0, a_1], \dots, [a_i, a_{i+1}], \dots, [a_{N-1}, a_N[$. On note $f(a_i^\pm)$ les limites à droite et à gauche de f au point a_i . On a alors

$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{N-1} [f(a_i^+) - f(a_i^-)] \delta_{a_i}$$

où $\{f'\}$ est la fonction continue par morceaux dérivée usuelle en dehors des points a_i .

On en déduit facilement la formule des sauts suivante.

Théorème B.5.10 (formule des sauts dans \mathbb{R}^d). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^2 et f une fonction définie sur \mathbb{R}^d , de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$, telle que

- a) la restriction de f à Ω se prolonge en une fonction de classe C^1 sur un voisinage ouvert de $\overline{\Omega}$
- b) la restriction de f à $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur un voisinage ouvert de $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.

Alors la fonction f est localement intégrable sur \mathbb{R}^d et on a dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$,

$$\partial_{x_j} f = \{\partial_{x_j} f\} + [f]_{\partial\Omega} \nu_j \sigma, \quad \forall 1 \leq j \leq d$$

où $\{\partial_{x_j} f\}$ est la fonction continue par morceaux sur \mathbb{R}^d définie par $\{\partial_{x_j} f\}(x) = \partial_{x_j} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$ et $[f]_{\partial\Omega}$ est le saut de f à travers l'hypersurface $\partial\Omega$ dans la direction ν :

$$[f]_{\partial\Omega}(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f(x + t\nu(x)) - f(x - t\nu(x))), \quad x \in \partial\Omega.$$

En d'autres termes en notant T_f la distribution représentée par f on a

$$\partial_j T_f = T_{\partial_j f} + [f]_{\partial\Omega} \nu_j \sigma.$$

Démonstration. On pose

$$f^\pm(x) := \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x \pm \nu(x)).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. La formule de Green implique que

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} f(x) \partial_j \varphi(x) dx &= - \int_{\Omega} \partial_j (f\varphi)(x) dx + \int_{\Omega} \partial_j f(x) \varphi(x) dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} f^-(x) \varphi(x) \nu_j(x) d\sigma(x) + \int_{\Omega} \partial_j f(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} f(x) \partial_j \varphi(x) dx &= - \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} \partial_j (f\varphi)(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} \partial_j f(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} f^+(x) \varphi(x) \nu_j(x) d\sigma(x) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} \partial_j f(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

et donc

$$- \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \partial_j \varphi(x) dx = \int_{\partial\Omega} (f^+ - f^-)(x) \varphi(x) \nu_j(x) d\sigma(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j f(x) \varphi(x) dx$$

et le résultat suit. \square

B.6. Produit de convolution

Définition B.6.1 (Produit de convolution $\mathcal{D}' \star \mathcal{D}$). Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on définit pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$T \star \varphi(x) := \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle T, (\tau_x)_* \check{\varphi} \rangle,$$

où $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$, τ_x est la translation de vecteur x : $\tau_x(y) := y + x$ et

$$(\tau_x)_* f(y) := f \circ \tau_{-x} = f(y - x).$$

Exercice. Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\text{Supp}(T \star \varphi) \subset \text{Supp}(T) + \text{Supp}(\varphi).$$

Exemple. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et tout $a \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\delta_a \star \varphi(x) = \varphi(x - a).$$

Proposition B.6.2. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, le produit de convolution $T \star \varphi$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^d , et on a*

$$\partial^\alpha(T \star \varphi) = (\partial^\alpha T) \star \varphi = T \star (\partial^\alpha \varphi).$$

En particulier si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ alors $T \star \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. On a d'une part

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha T) \star \varphi(x) &= \langle \partial^\alpha T, \varphi(x - \cdot) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha(\varphi(x - \cdot)) \rangle \\ &= \langle T, (\partial^\alpha \varphi)(x - \cdot) \rangle \\ &= T \star \partial^\alpha \varphi. \end{aligned}$$

D'autre part soit $a \in \mathbb{R}^d$ et montrons que $T \star \varphi$ est de classe C^∞ sur $B(a, 1)$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $B(a, 1)$. Alors la fonction

$$(x, y) \mapsto \chi(x)\varphi(x - y)$$

est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et à support dans $\text{Supp } \chi \times (\text{Supp } \chi + \text{Supp } \varphi)$. D'après la Proposition B.4.8 la fonction

$$F : x \mapsto \langle T, \chi(x)\varphi(x - \cdot) \rangle$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^d et

$$\partial^\alpha \langle T, \chi(x)\varphi(x - \cdot) \rangle = \langle T, \partial^\alpha(\chi(x)\varphi(x - \cdot)) \rangle.$$

Comme la fonction F coïncide avec $T \star \varphi$ sur $B(a, 1)$, on en déduit que $T \star \varphi$ est de classe C^∞ sur $B(a, 1)$ et

$$T \star \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha(T \star \varphi)$$

sur $B(a, 1)$. La conclusion vient du fait que ce résultat est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}^d$. \square

Remarque. Le même argument permet de définir le produit de convolution d'une distribution $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ par une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et on a $S \star \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Théorème B.6.3. *Soit T une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $(\zeta_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,1)}$ une suite régularisante. Soit $T_\varepsilon := T \star \zeta_\varepsilon$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $T_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et*

$$T_\varepsilon \longrightarrow T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Démonstration. D'après la Proposition B.6.2 on sait que $T_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs grâce à la Proposition B.4.9 on a pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \langle T_\varepsilon, \varphi \rangle &= \int T_\varepsilon(x)\varphi(x) dx \\ &= \int \langle T, \zeta_\varepsilon(x - \cdot)\varphi(x) \rangle dx \\ &= \langle T, \int \zeta_\varepsilon(x - \cdot)\varphi(x) dx \rangle. \end{aligned}$$

Mais

$$\int \zeta_\varepsilon(x - y)\varphi(x) dx = \check{\zeta}_\varepsilon \star \varphi(y)$$

donc

$$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle T, \check{\zeta}_\varepsilon \star \varphi \rangle.$$

Par ailleurs si R est tel que $\text{Supp } \zeta \subset B(0, R)$, alors pour $\varepsilon \in (0, 1)$ on a

$$\text{Supp } (\check{\zeta}_\varepsilon \star \varphi) \subset K := \{y \in \mathbb{R}^d / \text{dist}(y, \text{Supp } \varphi) \leq R\}.$$

Comme par ailleurs

$$\partial^\alpha(\check{\zeta}_\varepsilon \star \varphi) = \check{\zeta}_\varepsilon \star \partial^\alpha \varphi$$

d'après le Théorème B.2.4 on a

$$\partial^\alpha(\check{\zeta}_\varepsilon \star \varphi) \longrightarrow \partial^\alpha \varphi$$

uniformément sur K lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Par continuité séquentielle des distributions (Proposition B.3.2) on a donc pour toute suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$

$$\langle T_{\varepsilon_n}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\zeta}_{\varepsilon_n} \star \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad n \rightarrow \infty$$

donc $T_{\varepsilon_n} \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Le théorème est démontré. \square

Définition B.6.4 (Produit de convolution $\mathcal{D}' \star \mathcal{E}'$). Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On définit le produit de convolution $T \star S$ par la distribution

$$\langle T \star S, \varphi \rangle := \langle T, \check{S} \star \varphi \rangle,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, où la distribution \check{S} est définie par

$$\langle \check{S}, \psi \rangle := \langle S, \check{\psi} \rangle, \quad \check{\psi}(x) := \psi(-x).$$

Exemple. Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et tout $a \in \mathbb{R}^d$ on a

$$T \star \delta_a = T \circ \tau_{-a}.$$

Théorème B.6.5. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a

$$\partial^\alpha(T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S = T \star (\partial^\alpha S).$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha(T \star S), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T \star S, \partial^\alpha \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \check{S} \star \partial^\alpha \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha(\check{S} \star \varphi) \rangle \\ &= \langle \partial^\alpha T, \check{S} \star \varphi \rangle \\ &= \langle (\partial^\alpha T) \star S, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

donc

$$\partial^\alpha(T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S.$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha(\check{S} \star \varphi) \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, (\partial^\alpha \check{S}) \star \varphi \rangle \\ &= \langle T, (\partial^\alpha S)^\vee \star \varphi \rangle, \end{aligned}$$

donc

$$\partial^\alpha(T \star S) = T \star (\partial^\alpha S).$$

Le théorème est démontré. \square

Exemple. On a $T \star \partial^\alpha \delta_0 = \partial^\alpha T$.

Exercice. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\text{Supp}(T \star S) \subset \text{Supp}(T) + \text{Supp}(S).$$

Proposition B.6.6. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ convergeant au sens des distributions vers $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\partial^\alpha(T_n \star \varphi) \longrightarrow \partial^\alpha(T \star \varphi)$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^d lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $T = 0$ et que $|\alpha| = 0$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$T_n \star \varphi(x) = \langle T_n, \varphi(x - \cdot) \rangle \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{B.7})$$

Soit $R > 0$ fixé et montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq R} |(T_n \star \varphi)(x)| = 0. \quad (\text{B.8})$$

Par l'absurde, sinon il existerait $\varepsilon > 0$ et (x_n) une suite de $\overline{B(0, R)}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|T_n \star \varphi(x_n)| > \varepsilon.$$

Par compacité de $\overline{B(0, R)}$ quitte à extraire une sous-suite la suite (x_n) converge vers une limite \bar{x} dans $\overline{B(0, R)}$. Soit le compact $K := \text{supp } \varphi + \overline{B(0, R)}$. Alors par le théorème de Banach-Steinhaus il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans K ,

$$\begin{aligned} \sup_{|x| \leq R} |T_n \star \psi(x)| &= \sup_{|x| \leq R} |\langle T_n, \psi(x - \cdot) \rangle| \\ &\leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{y \in K} |\partial^\alpha \psi(y)|. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} |T_n \star \varphi(\bar{x})| &\geq |T_n \star \varphi(x_n)| - |T_n \star \varphi(x_n) - T_n \star \varphi(\bar{x})| \\ &\geq \varepsilon - d|x_n - \bar{x}| \max_{1 \leq j \leq d} \sup_{|x| \leq R} |T_n \star \partial_j \varphi(x)| \end{aligned}$$

par l'inégalité des accroissements finis, donc par (B.9) il vient

$$\begin{aligned} |T_n \star \varphi(\bar{x})| &\geq \varepsilon - Cd|x_n - \bar{x}| \max_{1 \leq j \leq d} \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{y \in K} |\partial^\alpha \partial_j \varphi(y)| \\ &\geq \varepsilon - C'|x_n - \bar{x}| \geq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ceci est en contradiction avec (B.7), et on en conclut que (B.8) est vraie. D'où le résultat. \square

Proposition B.6.7. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle T, \check{S} \star \varphi \rangle = \langle S, \check{T} \star \varphi \rangle$$

et donc si on définit $S \star T$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \langle S \star T, \varphi \rangle = \langle S, \check{T} \star \varphi \rangle,$$

on a $T \star S = S \star T$.

Démonstration. Soit ζ_ε une suite régularisante et soit

$$S_\varepsilon := S \star \zeta_\varepsilon.$$

Alors S_ε est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^d et à support dans $\text{Supp } S + \overline{B(0, \varepsilon)}$, qui est compact. On écrit alors

$$\begin{aligned} \langle S_\varepsilon, \check{T} \star \varphi \rangle &= \int S_\varepsilon(x) \langle \check{T}, \varphi(x - \cdot) \rangle dx \\ &= \int S_\varepsilon(x) \langle T, \varphi(x + \cdot) \rangle dx \\ &= \langle T, \int S_\varepsilon(x) \varphi(x + \cdot) dx \rangle \\ &= \langle T, \int S_\varepsilon(-x) \varphi(-x + \cdot) dx \rangle \\ &= \langle T, \check{S}_\varepsilon \star \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Il reste à passer à la limite en ε . On sait que S_ε converge vers S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, et que le support de S_ε est inclus dans un compact fixe, par exemple $\text{Supp } S + \overline{B(0, 1)}$. Si χ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 sur un voisinage ouvert de $\text{Supp } S + \overline{B(0, 1)}$ alors

$$\langle S_\varepsilon, \check{T} \star \varphi \rangle = \langle S_\varepsilon, \chi(\check{T} \star \varphi) \rangle \longrightarrow \langle S, \chi(\check{T} \star \varphi) \rangle = \langle S, \check{T} \star \varphi \rangle.$$

Par ailleurs le support de $\check{S}_\varepsilon \star \varphi$ est inclus dans le compact $K := \text{Supp } \varphi + \text{Supp } S + \overline{B(0, 1)}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a grâce à la Proposition B.6.6

$$\partial^\alpha (\check{S}_\varepsilon \star \varphi) = \check{S}_\varepsilon \star (\partial^\alpha \varphi) \longrightarrow \check{S} \star (\partial^\alpha \varphi) = \partial^\alpha (\check{S} \star \varphi),$$

uniformément sur K . On en déduit que

$$\langle T, \check{S}_\varepsilon \star \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \check{S} \star \varphi \rangle$$

et la proposition suit. \square

Exercice. Si T_1, T_2, T_3 sont trois distributions dont au moins deux sont à support compact, alors

$$T_1 \star (T_2 \star T_3) = (T_1 \star T_2) \star T_3.$$

Remarque. Dans l'exercice ci-dessus, il faut prendre garde au fait que le résultat d'associativité énoncé peut être faux si une seule des distributions est à support compact. Par exemple si H est la fonction d'Heaviside

$$H(x) = \mathbf{1}_{x \geq 0}$$

alors (voir l'exercice page 54 pour la dérivée de H au sens des distributions)

$$(1 \star \delta'_0) \star H = 1' \star H = 0 \quad \text{mais} \quad 1 \star (\delta'_0 \star H) = 1 \star H' = 1 \star \delta_0 = 1.$$

B.7. L'espace de Schwartz et les distributions tempérées

Définition B.7.1 (Espace de Schwartz). On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace (de Schwartz) des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées : une fonction φ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si pour tous les entiers $m \in \mathbb{N}$, et tous les multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\langle x \rangle^m \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty,$$

avec $\langle x \rangle := \sqrt{1 + |x|^2}$.

Notons que cet ensemble est stable par dérivation, et par multiplication par un polynôme.

Exemples. On a bien sûr $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs toutes les fonctions de la forme

$$P(x)e^{-a|x|^2}$$

avec $a > 0$ et P polynôme, sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ peut être muni d'une topologie en considérant la famille dénombrable suivante de semi-normes : pour tous les entiers $m, j \in \mathbb{N}$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on pose

$$\rho_{m,j}(\varphi) := \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\langle x \rangle^m \partial^\alpha \varphi(x)|. \quad (\text{B.10})$$

Muni de cette famille, l'espace de Schwartz est un espace de Fréchet (la complétude se vérifie facilement puisque toute suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^d}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\partial^\alpha f_n$ converge uniformément pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ vers une limite g_α et on identifie facilement que $g_\alpha = \partial^\alpha g_0$).

Proposition B.7.2. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, à support dans $B(0, 2)$, à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 sur $\overline{B(0, 1)}$. Pour tout $n \geq 1$ posons

$$\chi_n(x) := \chi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et posons

$$\varphi_n := \chi_n \varphi.$$

Alors $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est à support dans $B(0, 2n)$ et grâce à la formule de Leibniz on montre facilement que, avec la notation (B.10),

$$|\langle x \rangle^m \partial^\alpha (\varphi - \varphi_n)(x)| \leq |\langle x \rangle^m (1 - \chi_n(x)) \partial^\alpha \varphi(x)| + \frac{C}{n} p_{m,j}(\varphi),$$

avec

$$C := 2^j \max_{0 < |\beta| \leq j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\beta \chi(x)|$$

et j est tel que $|\alpha| \leq j$. Comme par ailleurs

$$1 - \chi(y) = 0 \text{ si } |y| \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq 1 - \chi(y) \leq 1 \text{ si } |y| \geq 1$$

il vient que

$$0 \leq 1 - \chi(y) \leq |y|^2$$

et donc

$$|\langle x \rangle^m (1 - \chi_n(x)) \partial^\alpha \varphi(x)| \leq \frac{1}{n^2} \langle x \rangle^m \langle x \rangle^2 |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq \frac{1}{n^2} p_{m+2,j}(\varphi).$$

On en conclut que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout α tel que $|\alpha| \leq j$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\langle x \rangle^m \partial^\alpha (\varphi - \varphi_n)(x)| \leq \frac{1}{n^2} p_{m+2,j}(\varphi) + \frac{C}{n} p_{m,j}(\varphi) \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

d'où le résultat. \square

Proposition B.7.3 ($\mathcal{E}' \star \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$). *Pour toute distribution E de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $E \star \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. D'après la Remarque page 64, $E \star \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ donnés, alors en notant p l'ordre de la distribution à support compact E , et en considérant R un réel tel que le support de E soit contenu dans $B(0, R)$, il vient

$$\begin{aligned} |\langle x \rangle^m \partial^\alpha (E \star \varphi)(x)| &= |\langle x \rangle^m (E \star \partial^\alpha \varphi)(x)| \\ &\leq C \langle x \rangle^m \max_{|\gamma| \leq p + |\alpha|} \sup_{|y| \leq R} |\partial^\gamma \varphi(x - y)| \\ &\leq C \max_{|\gamma| \leq p + |\alpha|} \sup_{|y| \leq R} |\langle x - y + y \rangle^m \partial^\gamma \varphi(x - y)| \\ &\leq C' \max_{|\gamma| \leq p + |\alpha|} \sup_{y' \in \mathbb{R}^d} (\langle y' \rangle^m + (1 + R)^m) |\partial^\gamma \varphi(y')|. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tous les entiers m, j , avec la notation (B.10),

$$p_{m,j}(E \star \varphi) \leq C'(1 + R^m) p_{m,j+p}(\varphi). \quad (\text{B.11})$$

La proposition est démontrée. \square

Définition B.7.4 (Distribution tempérée). *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire une forme linéaire T telle qu'il existe des entiers m, j et une constante $C > 0$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et avec la notation (B.10),*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C p_{m,j}(\varphi).$$

L'espace des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition B.7.5. *L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation, par multiplication par une fonction C^∞ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, et par convolution par une fonction de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. • Montrons que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation. Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $1 \leq k \leq d$ la dérivée $\partial_k S$ est la forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \partial_k S, \varphi \rangle = -\langle S, \partial_k \varphi \rangle.$$

Comme $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il existe $m, j \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad |\langle S, \partial_k \varphi \rangle| \leq C \rho_{m,j}(\partial_k \varphi) \leq C \rho_{m,j+1}(\varphi).$$

Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la forme linéaire $\partial_k S$ s'étend donc de façon unique en une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pour laquelle l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors en particulier

$$|\langle \partial_k S, \varphi_n - \varphi_m \rangle| \longrightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

La suite $(\langle \partial_k S, \varphi_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers une limite finie, et cette limite définit une forme linéaire S_k sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle S_k, \psi \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_k S, \psi_n \rangle$$

pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, où $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite quelconque de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers ψ (on vérifie facilement que la limite ne dépend pas de la suite choisie). Comme la restriction de S_k à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est confondue avec $\partial_k S$ on conclut que $\partial_k S$ peut être prolongée de manière continue en une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ce qu'il fallait démontrer.

• Le raisonnement est similaire pour la stabilité par multiplication par une fonction f de classe C^∞ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées. En effet par définition

$$\langle fS, \varphi \rangle = \langle S, f\varphi \rangle$$

et par ailleurs pour tous les entiers m et j il existe un entier $k_j(f)$ et une constante $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \rho_{m,j}(f\varphi) \leq C \rho_{m+k_j(f),j}(\varphi).$$

On a alors

$$|\langle S, f\varphi \rangle| \leq C \rho_{m+k_j(f),j}(\varphi)$$

et le résultat suit.

• Soit enfin $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, et l'on rappelle que la distribution $S \star E$ est définie comme la forme linéaire

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \longmapsto \langle S, \check{E} \star \varphi \rangle.$$

Soit $R > 0$ tel que E soit à support dans $B(0, R)$. Alors c'est aussi le cas pour \check{E} et l'inégalité (B.11) de la démonstration de la Proposition B.7.3, montre que pour tous les entiers m, j , il existe une constante C telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\rho_{m,j}(\check{E} \star \varphi) \leq C \rho_{m,j+p}(\varphi)$$

où p est l'ordre de la distribution à support compact E . Comme la distribution S est tempérée, on en déduit qu'il existe des entiers m, j et une constante C' tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad |\langle S \star E, \varphi \rangle| \leq C' \rho_{m,j+p}(\varphi).$$

Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la forme linéaire $S \star E$ s'étend donc de façon unique en une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et l'inégalité ci-dessus est donc vraie pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. La proposition est démontrée. \square

Exemples. a) On a $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

b) Toute fonction appartenant à l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p \leq \infty$ définit une distribution tempérée sur \mathbb{R}^d .

c) Toute fonction continue à croissance polynômiale définit une distribution tempérée sur \mathbb{R}^d .

d) Sur \mathbb{R} , la distribution

$$T := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$$

est tempérée si la suite (a_k) est à croissance polynômiale, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que

$$a_k = O(|k|^p), \quad |k| \rightarrow \infty.$$

En effet il existe $C > 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|a_k| \leq C \langle k \rangle^p$. On écrit alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle k \rangle^p |\varphi(k)| \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\langle k \rangle^{p+2}}{\langle k \rangle^2} |\varphi(k)| \\ &\leq C' \rho_{p+2,0}(\varphi). \end{aligned}$$

e) Les distributions définies par les fonctions

$$x \mapsto e^x, \quad \sinh(x) \quad \text{ou} \quad \cosh(x)$$

ne sont pas des distributions tempérées.

f) La distribution définie par la fonction

$$x \mapsto e^x e^{ie^x}$$

est une distribution tempérée sur \mathbb{R} . En effet on a

$$\frac{d}{dx}(e^{ie^x}) = ie^x e^{ie^x}$$

et la fonction

$$x \mapsto e^{ie^x}$$

est de classe C^1 et bornée sur \mathbb{R} donc définit une distribution tempérée sur \mathbb{R} .

Proposition B.7.6. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors l'application

$$x \mapsto S \star \varphi(x) := \langle S, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

est bien définie et appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. En outre $S \star \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soient deux entiers m, j et une constante $C > 0$ tels que

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad |\langle S, \psi \rangle| \leq C \rho_{m,j}(\psi).$$

On commence par montrer que l'application

$$g : \quad x \mapsto \langle S, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

est bien définie. On a

$$|\langle S, \varphi(x - \cdot) \rangle| \leq C p_{m,j}(\phi_x),$$

avec

$$\phi_x : y \mapsto \varphi(x - y),$$

et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\begin{aligned} \langle y \rangle^m |\partial^\alpha \phi_x(y)| &= \langle y - x + x \rangle^m |(\partial^\alpha \varphi)(x - y)| \\ &\leq \langle x \rangle^m p_{m,|\alpha|}(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

donc g est bien définie. Montrons que g appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il s'agit de dériver sous le crochet, mais même si x peut être restreint à un compact, ce n'est pas le cas pour y . On approxime donc φ par une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On sait que l'application

$$g_n : x \mapsto \langle S, \varphi_n(x - \cdot) \rangle$$

appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \partial^\alpha g_n(x) = \langle S, (\partial^\alpha \varphi_n)(x - \cdot) \rangle.$$

Comme $y \mapsto (\partial^\alpha \varphi_n(x - y))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $y \mapsto \partial^\alpha \varphi(x - y)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, uniformément en x sur tout compact par l'inégalité (B.12), on a le résultat.

Montrons maintenant que $S \star \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On écrit pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} |\langle S \star \varphi, \psi \rangle| &= |\langle S, \check{\varphi} \star \psi \rangle| \\ &\leq C p_{m,j}(\check{\varphi} \star \psi) \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\alpha| \leq j} \int \langle x - y \rangle^m |\varphi(y - x)| \langle y \rangle^m |\partial^\alpha \psi(y)| dy \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|\langle \cdot \rangle^m \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\langle \cdot \rangle^m \partial^\alpha \psi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

set on conclut par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. et donc la proposition est démontrée. \square

B.8. Solutions fondamentales d'opérateurs différentiels

Définition B.8.1. *Un opérateur différentiel sur Ω est une application \mathbb{C} -linéaire P de $C^\infty(\Omega)$ dans lui-même définie par une expression de la forme*

$$P\varphi(x) := \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x)$$

sur Ω , avec $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$.

On utilise souvent la notation

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_d}^{\alpha_d}, \quad D_{x_j} := \frac{1}{i} \partial_{x_j}.$$

Définition B.8.2. *Soit P un opérateur différentiel sur Ω , de la forme*

$$P\varphi(x) := \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x).$$

On appelle symbole de l'opérateur P le polynôme en ξ_1, \dots, ξ_d à coefficients dans $C^\infty(\Omega)$

$$\sigma(P)(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

On appelle ordre de l'opérateur P le degré du polynôme $\sigma(P)$:

$$\text{ordre de } P := \max\{|\alpha| \leq n, a_\alpha \text{ est non identiquement nulle sur } \Omega\}.$$

Les exemples les plus importants d'opérateurs différentiels sont issus de la physique mathématique :

— l'opérateur de transport sur $\mathbb{R}^{1+n} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$

$$\partial_t + \sum_{j=1}^n v_j \partial_j = \partial_t + v \cdot \nabla_x .$$

— le Laplacien sur \mathbb{R}_x^d

$$\Delta := \sum_{j=1}^d \partial_{x_j x_j}^2 .$$

— l'opérateur de la chaleur sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$

$$\partial_t - \frac{\kappa}{2} \Delta .$$

— l'opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$

$$i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta - V ,$$

où le potentiel V est une fonction $\mathbb{R}_x^d \rightarrow \mathbb{R}$.

— le d'Alembertien sur $\mathbb{R}^{1+n} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$

$$\square := \partial_{tt}^2 - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j x_j}^2 .$$

Définition B.8.3. Soit $P = P(D_x)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur \mathbb{R}^d

$$P(D_x) := \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha D^\alpha ,$$

où les a_α sont des constantes dans \mathbb{C} . Une solution fondamentale de $P(D_x)$ est une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$P(D_x)E = \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) .$$

Remarquons qu'il n'y a en général pas unicité de la solution fondamentale. Par exemple si $a_0 \equiv 0$ alors si E est une solution fondamentale, $E + c$ est aussi solution fondamentale pour toute constante c .

Théorème B.8.4. Soit $P = P(D_x)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur \mathbb{R}^d et soit E une solution fondamentale de $P(D_x)$. Si S est une distribution à support compact alors l'équation aux dérivées partielles

$$P(D_x)f = S \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

d'inconnue $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ admet au moins une solution, donnée par la formule

$$f = E \star S .$$

Démonstration. Le produit de convolution $E \star S$ définit bien une distribution sur \mathbb{R}^d et l'on sait que

$$D^\alpha(E \star S) = (D^\alpha E) \star S \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) .$$

Comme P est à coefficients constants, on a donc

$$P(D_x)(E \star S) = (P(D_x)E) \star S = \delta_0 \star S = S ,$$

d'où le résultat. □

Proposition B.8.5. *Posons*

$$E_1(x) := \frac{1}{2}|x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors la distribution E_1 est une solution fondamentale du Laplacien dans \mathbb{R} .

Démonstration. On cherche $E_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que

$$E_1'' = \delta_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

En notant H la fonction d'Heaviside on a

$$E_1' = H + c,$$

avec c une constante arbitraire. On en déduit que E_1 est une fonction continue qui s'écrit

$$E_1 = x_+ + cx + c'$$

avec c et c' deux constantes arbitraires. Le cas particulier $c = -\frac{1}{2}$ et $c' = 0$ donne le résultat souhaité. \square

Exercice. Posons

$$E_2(x) := \frac{1}{2\pi} \log |x|, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

$$E_d(x) := \frac{1}{c_d} \frac{1}{|x|^{d-2}}, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},$$

avec $c_d := (d-2)|\mathbb{S}^{d-1}|$. Alors pour tout entier $d \geq 2$, la distribution E_d est une solution fondamentale du Laplacien dans \mathbb{R}^d .

Définition B.8.6. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que T est une distribution harmonique dans Ω si

$$\Delta T = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Théorème B.8.7. Toute distribution harmonique dans Ω est une fonction de classe C^∞ dans Ω .

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$\Delta T = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et $R > 0$ tels que $B(a, 2R)$ est contenue dans Ω . Montrons que T est une fonction de classe C^∞ dans $B(a, \frac{1}{2}R)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 dans $B(a, R)$ et à support dans $B(a, \frac{3}{2}R)$. Alors $\varphi T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et l'on a

$$\Delta(\varphi T) = 2\nabla\varphi \cdot \nabla T + (\Delta\varphi)T.$$

Mais alors φT est une distribution harmonique dans $B(a, R)$. On note par φT le prolongement par 0 de φT en dehors de Ω . Soit ζ_ε une suite régularisante, alors

$$\Delta(\zeta_\varepsilon \star \varphi T) = \zeta_\varepsilon \star \Delta(\varphi T)$$

et donc

$$\text{Supp} \Delta(\zeta_\varepsilon \star \varphi T) \subset \text{Supp} \zeta_\varepsilon + \text{Supp} \Delta(\varphi T) \subset B(0, \varepsilon) + \mathbb{R}^d \setminus B(a, R) = \mathbb{R}^d \setminus B(a, R - \varepsilon).$$

On choisit $\varepsilon < R/4$. Soit Ψ une fonction radiale ($\Psi(x) = \psi(|x|^2)$) à support dans $B(0, R/4)$, d'intégrale 1. Alors comme $\zeta_\varepsilon \star \varphi T$ est harmonique sur $B(a, \frac{3}{4}R)$, la propriété de la moyenne (voir le cours d'Analyse Complexe ou ici¹) implique que

$$\zeta_\varepsilon \star \varphi T(x) = \int_{B(0, \frac{1}{4}R)} (\zeta_\varepsilon \star \varphi T)(x-y) \psi(|y|^2) dy = \Psi \star (\zeta_\varepsilon \star \varphi T)(x)$$

pour tout $x \in B(a, \frac{1}{2}R)$. Comme par ailleurs par le Théorème B.6.3

$$\zeta_\varepsilon \star \varphi T \longrightarrow \varphi T$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ quand ε tend vers zéro, par la Proposition B.6.6 on sait que

$$\Psi \star (\zeta_\varepsilon \star \varphi T) \longrightarrow \Psi \star (\varphi T)$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^d quand ε tend vers zéro. Comme $\zeta_\varepsilon \star \varphi T$ coïncide avec $\Psi \star (\zeta_\varepsilon \star (\varphi T))$ sur $B(a, \frac{1}{2}R)$, on a alors que φT coïncide avec $\Psi \star (\varphi T)$ sur $B(a, \frac{1}{2}R)$. On en déduit que T est de classe C^∞ sur $B(a, \frac{1}{2}R)$ puisque $\varphi T = T$ sur $B(a, \frac{1}{2}R)$. Le résultat suit. \square

1. On rappelle que si $u \in C^2(\Omega)$ vérifie $\Delta u = 0$ dans un ouvert Ω alors pour tout $x \in \Omega$ et tout R tel que $0 < R < d(x, \partial\Omega)$ et toute fonction $x \mapsto \Psi(x) = \psi(|x|^2)$ intégrable d'intégrale 1, on a

$$u(x) = \int_{B(0, R)} u(x+y) \psi(|y|^2) dy.$$

Pour démontrer cela il suffit d'écrire la formule de la moyenne $u(x) |\mathbb{S}^{d-1}| = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u(x+wr) d\sigma(w)$ pour tout $0 < r < d(x, \partial\Omega)$, puis multiplier par $\psi(r^2)r^{d-1}$ et intégrer sur $[0, R]$.